



گزینه ۲

۱

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن می‌یابیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

چون $3 \notin [-2, 2]$ ، پس مقدار تابع را به ازای $x = -1, -2, 2$ محاسبه و باهم مقایسه می‌کنیم.

$$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

$$f(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17$$

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3$$

باتوجه به مقادیر به دست آمده، بیشترین مقدار تابع $y = 10$ است.

نقطه A را $A(x, \sqrt[3]{-x})$ با فرض $x \in [0, 1]$ در نظر می‌گیریم، در این صورت $A'(\sqrt[3]{x}, -x)$ خواهد بود.

$$AA' = \sqrt{(x - \sqrt[3]{x})^2} \times 2 = \sqrt{2} \underbrace{|x - \sqrt[3]{x}|}_{g(x)}$$

$$g(x) = x - \sqrt[3]{x}, \quad x \in [0, 1]$$

حال بیشترین مقدار $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{27} \Rightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$g(0) = g(1) = 0, \quad g\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{3\sqrt{3}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$$

$$\max(AA') = \sqrt{2} \left| \frac{-2}{3\sqrt{3}} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

$$g(x) = \frac{x^2(x^2 - 4)}{x^2 - 1} = \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 1}$$

$$g'(x) = \frac{(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x[(2x^2 - 4)(x^2 - 1) - x^4 + 4x^2]}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 4)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & ; |x| \geq 2 \\ -g(x) & ; |x| < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} g'(x) & ; |x| > 2 \\ -g'(x) & ; |x| < 2 \end{cases}$$

تابع f' در سه نقطه $x = 2$ و $x = -2$ و $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow -3x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 \leq x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq \sqrt[3]{x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq x \Rightarrow x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \geq 0$$

بنابراین مینیمم مطلق تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۸

نقاط بحرانی تابع $f(x) = x|3 - x^2|$ را حساب می‌کنیم:

$$3 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \in D \\ x = -\sqrt{3} \notin D \end{cases}$$

$$(x(3 - x^2))' = 0 \Rightarrow (3x - x^3)' = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in D \\ x = -1 \in D \end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{-1, 1, \sqrt{3}, -1/5\}$ خواهد بود.

$$f(1) = 2, f(-1) = -2, f(\sqrt{3}) = 0$$

$$f(-1/5) = f(-\frac{3}{5}) = -\frac{3}{5}|3 - \frac{9}{25}| = -\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = -\frac{9}{25}$$

کمترین مقدار تابع -2 خواهد بود.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۴۰۰

راه حل اول: برای یافتن مینیمم مقدار y ، ابتدا معادله $y' = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{3a + x}{\sqrt[4]{a^3 x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \frac{3a + x}{\sqrt[4]{x}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \times \frac{\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}(3a + x)}{\sqrt[4]{x^7}} = \frac{4x - (3a + x)}{4\sqrt[4]{x^5}} = \frac{3x - 3a}{4\sqrt[4]{x^5}}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 3x - 3a = 0 \Rightarrow x = a$$

چون a مقداری مثبت است، جدول تعیین علامت y' به صورت زیر می‌باشد:

	a		
y'	-	0	+
			

بنابراین y در نقطه $x = a$ مینیمم است، در نتیجه داریم:

$$y(a) = \frac{3a + a}{\sqrt[4]{a^3 a}} = \frac{4a}{a} = 4$$

راه حل دوم: a مقداری ثابت است پس به ازای تمام مقادیر x ، a فقط یک مقدار می‌پذیرد. برای سادگی حل a را مقداری انتخاب می‌کنیم که به ازای آن، گزینه‌ها یکسان نشوند. با انتخاب $a = 2$ ، چهار گزینه مقدار متفاوتی خواهند داشت و همچنین داریم:

$$y = \frac{6 + x}{\sqrt[4]{\lambda x}}$$

برای یافتن مینیمم مقدار y ابتدا معادله $y' = 0$ را حل می‌کنیم:

$$y = \frac{6 + x}{\sqrt[4]{\lambda x}} = (6 + x)(\lambda x)^{-\frac{1}{4}}$$

$$y' = (\lambda x)^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}(6 + x)(\lambda x)^{-\frac{5}{4}} = (\lambda x)^{-\frac{5}{4}}(\lambda x - 12 - 2x) = \frac{6x - 12}{\sqrt[4]{(\lambda x)^5}}$$

$$y' = 0 \xrightarrow{x \neq 0} 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

مینیمم مقدار تابع برابر با $y(2)$ است و داریم:

$$y(2) = \frac{6 + 2}{\sqrt[4]{\lambda(2)}} = \frac{8}{\sqrt[4]{16}} = \frac{8}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{8}{2} = 4$$

راه حل سوم:

نکته: به ازای n عدد $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

باتوجه به نکته داریم:

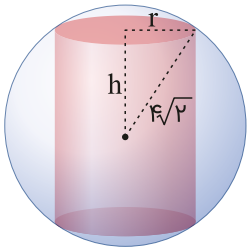
$$f(x) = \underbrace{\frac{a}{\sqrt[4]{a^3 x}}}_{x_1} + \underbrace{\frac{a}{\sqrt[4]{a^3 x}}}_{x_2} + \underbrace{\frac{a}{\sqrt[4]{a^3 x}}}_{x_3} + \underbrace{\frac{x}{\sqrt[4]{a^3 x}}}_{x_4}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4 \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۱

گزینه ۲

۷



$$h^2 + r^2 = 3r^2 \Rightarrow h = \sqrt{3r^2 - r^2}$$

$$f = 2\pi r \times h = 4\pi r \sqrt{3r^2 - r^2} = 4\pi \sqrt{3r^3 - r^4}$$

$$f' = 4\pi \times \frac{6r - 4r^3}{2\sqrt{3r^3 - r^4}} = 0 \quad \begin{cases} r = 0 & \text{غلط} \\ r = 4 & \text{درست} \end{cases}$$

اگر $r = 4$ باشد $h = 4$ است.

$$\max(S) = 4\pi(4)(4) = 64\pi$$

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

گام اول

فاصله میان دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ برابر است با:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

گام دوم

نقطه موردنظر را $M(\alpha, 0)$ در نظر می‌گیریم. باتوجه به گام اول، فواصل MA و MB را محاسبه می‌کنیم.

$$|MA| = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}$$

$$|MB| = \sqrt{(7 - \alpha)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}$$

تفاضل این دو فاصله، عبارتی برحسب α است که برای یافتن ماکسیمم مقدارش، کافی است ریشه مشتق این عبارت را به دست آوریم.

$$d(\alpha) = |MA| - |MB| = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25} - \sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}$$

$$d'(\alpha) = \frac{-2(1 - \alpha)}{2\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}} - \frac{-2(7 - \alpha)}{2\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} = \frac{(7 - \alpha)}{\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} - \frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}}$$

$$d'(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{(7 - \alpha)}{\sqrt{(7 - \alpha)^2 + 4}} = \frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 - \alpha)^2 + 25}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{(7 - \alpha)^2}{(7 - \alpha)^2 + 4} = \frac{(1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha)^2 + 25}$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2((7 - \alpha)^2 + 4) = (7 - \alpha)^2((1 - \alpha)^2 + 25)$$

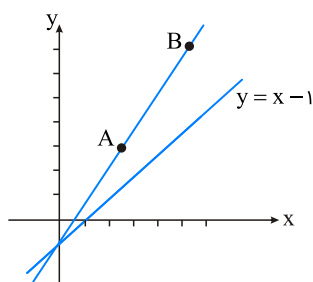
$$\Rightarrow (1 - \alpha)^2(7 - \alpha)^2 + 4(1 - \alpha)^2 = (7 - \alpha)^2(1 - \alpha)^2 + 25(7 - \alpha)^2$$

$$\Rightarrow 4(1 - \alpha)^2 = 25(7 - \alpha)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2(1 - \alpha) = \pm 5(7 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\alpha = 35 - 5\alpha \Rightarrow 3\alpha = 33 \Rightarrow \alpha = 11 \\ 2 - 2\alpha = -35 + 5\alpha \Rightarrow 7\alpha = 37 \Rightarrow \alpha = \frac{37}{7} \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها، $\alpha = 11$ قابل قبول است.

دو نقطه A و B و خط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید دو نقطه A و B در یک طرف خط $y = x - 1$ قرار دارند؛ بنابراین نقطه‌ای از این خط که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار را دارد، همان محل برخورد خط $y = x - 1$ و خط گذرنده از نقاط A و B است. ابتدا معادله خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

$$y - ۳ = \frac{۷ - ۳}{۴ - ۲}(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲(x - ۲) \Rightarrow y - ۳ = ۲x - ۴ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

با مساوی قرار دادن معادله دو خط، نقطه برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$۲x - ۱ = x - ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = -۱ \Rightarrow M(۰, -۱)$$

بنابراین طول نقطه M برابر با صفر است.

اگر $x \geq 0$ باشد:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 \geq 0 \Rightarrow x = 0 \quad (1)$$

اگر $x < 0$ باشد:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\cap(x < 0)} -1 \leq x < 0 \quad (2)$$

اجتماع جواب‌های به‌دست‌آمده $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$ است، اما جواب درست $[-1, +\infty)$ است، زیرا $x = 0$ در دامنه تابع قرار دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

یکی از اعداد را x و دیگری را y می‌نامیم. داریم: $y = 2x - 6$
می‌خواهیم $x.y$ مینیمم شود پس این حاصل‌ضرب را به‌صورت تابعی برحسب x نوشته و مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$f(x) = x.y = x(2x - 6) = 2x^2 - 6x$$

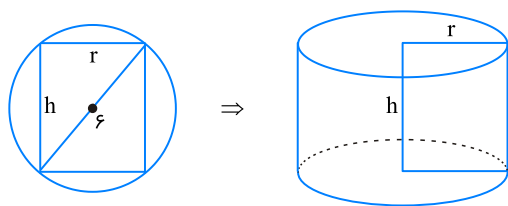
$$\Rightarrow f'_x = 4x - 6 = 0 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{y=2x-6} y = 2\left(\frac{3}{2}\right) - 6 = 3 - 6 = -3$$

مجموع دو عدد برابر است با:

$$x + y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۸۱



می‌دانیم قطر مستطیل محاط درون دایره، برابر با قطر دایره است پس طبق قضیه فیثاغورس داریم:

$$h^2 + r^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 + r^2 = 36 \Rightarrow r = \sqrt{36 - h^2}$$

حجم استوانه حاصل از دوران مستطیل برابر است با:

$$V = \pi r^2 h = \pi(36 - h^2)h = 36\pi h - \pi h^3$$

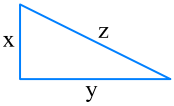
می‌خواهیم حجم استوانه بیشترین مقدار باشد پس ابتدا معادله $V'_h = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = 36\pi - 3\pi h^2$$

$$V'_h = 0 \Rightarrow 36\pi - 3\pi h^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\pi h^2 = 36\pi \Rightarrow h^2 = 12 \Rightarrow h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع x ، y و z به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



بر اساس اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$x + z = 6 \Rightarrow z = 6 - x$$

از طرفی طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$x^2 + y^2 = z^2 \xrightarrow{z=6-x} x^2 + y^2 = (6-x)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36$$

$$\Rightarrow y^2 = 36 - 12x \Rightarrow y = \sqrt{36 - 12x} \Rightarrow y = 2\sqrt{9 - 3x}$$

اکنون مساحت مثلث را به صورت تابعی بر حسب x می‌نویسیم:

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x(2\sqrt{9 - 3x}) = x\sqrt{9 - 3x}$$

برای بهینه کردن مساحت، معادله $S'_x = 0$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = \sqrt{9 - 3x} - \frac{3x}{2\sqrt{9 - 3x}} = \frac{2(9 - 3x) - 3x}{2\sqrt{9 - 3x}} = \frac{18 - 9x}{2\sqrt{9 - 3x}}$$

$$S'_x = 0 \Rightarrow 18 - 9x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\xrightarrow{y=2\sqrt{9-3x}} y = 2\sqrt{9 - 6} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین بیشترین مساحت مثلث قائم‌الزاویه با مشخصات داده شده برابر است با:

$$S_{\max} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف آن است که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x^2 + x - 2|$ ، ضابطه تابع را ساده تر می کنیم، داریم:

$$f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2| = (x-1)|(x+2)(x-1)|$$

$x = 1$ و $x = -2$ ریشه های عبارت درون قدر مطلق هستند پس می توان نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2(x+2) & ; x \geq 1 \text{ یا } x \leq -2 \\ -(x-1)^2(x+2) & ; -2 < x < 1 \end{cases}$$

تابع در نقاط $x = 1$ و $x = -2$ پیوسته است پس ضابطه $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} (x-1)(3x+3) & ; x > 1 \text{ یا } x < -2 \\ -(x-1)(3x+3) & ; -2 < x < 1 \end{cases}$$

اکنون ریشه های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می آوریم:

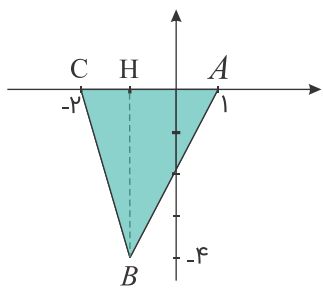
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1, x < -2 : (x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ -2 < x < 1 : -(x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

باتوجه به اینکه $f'_-(1) = f'_+(1) = 0$ است پس $x = 1$ نیز نقطه بحرانی تابع $f(x)$ است. بررسی می کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف نشده است. داریم:

$$\left. \begin{aligned} f'_+(-2) &= -(-2-1)(-3) = -9 \\ f'_-(-2) &= (-2-1)(-3) = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(-2) \neq f'_-(-2) \Rightarrow f'(-2) \text{ وجود ندارد}$$

بنابراین تابع $f(x)$ دارای سه نقطه بحرانی $A(1, 0)$ ، $B(-1, -4)$ و $C(-2, 0)$ است. مساحت مثلث $\triangle ABC$ برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BH \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{12}{2} = 6$$



کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۲

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد؛ همچنین فرض کنیم f بر بازه I شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطه اکسترمم نسبی تابع f است، هرگاه $f'(x)$ قبل و بعد از c تغییر علامت داده باشد.

ب) نقطه $c \in D_f$ ، نقطه بحرانی تابع f است؛ هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-a\}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + a) - (x^2 - 2x)}{(x + a)^2} = \frac{x^2 + 2ax - 2a}{(x + a)^2}$$

بررسی می‌کنیم به‌ازای چه مقادیری از a ، معادله $f'(x) = 0$ دارای ریشه ساده است.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2ax - 2a}{(x + a)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2ax - 2a = 0$$

این معادله درجه‌دو ریشه ساده خواهد داشت هرگاه $\Delta > 0$ باشد، پس داریم:

$$(2a)^2 - 4(1)(-2a) > 0 \Rightarrow 4a^2 + 8a = 4a(a + 2) > 0$$

a	-2	$*$
$4a(a+2)$	$+$ ϕ	$-$ ϕ $+$

بنابراین به‌ازای $a < -2$ یا $a > 0$ ، تابع f دارای اکسترمم نسبی است.

برای یافتن بیشترین و کمترین مقدار تابع پیوسته $f(x)$ روی بازه $[1, 3]$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی است که $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + k \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$$

چون $0 \notin [1, 3]$ پس تنها نقطه $x = 2$ قابل قبول است؛ همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه هم بحرانی‌اند. بنابراین داریم:

$$f(1) = 1 - 3 + k = k - 2$$

$$f(2) = 8 - 12 + k = k - 4$$

$$f(3) = 27 - 27 + k = k$$

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ برابر k و کمترین مقدار آن برابر $k - 4$ است. این دو مقدار قرینه یکدیگرند؛ پس:

$$k = -(k - 4) \Rightarrow k = -k + 4 \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

برای تعیین اکسترم‌های نسبی تابع $f(x)$ و نوع آن‌ها از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم.
ابتدا از تابع $f(x)$ مشتق گرفته و با حل معادله $f'(x) = 0$ ، نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^3 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x-1)(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow 3(x-1)^2(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

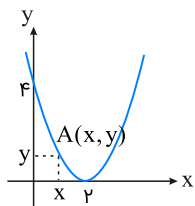
اکنون با تعیین علامت $f'(x)$ ، اکسترم‌های نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

min

باتوجه به جدول فوق، تابع $f(x)$ فقط دارای یک نقطهٔ مینیمم نسبی در نقطهٔ $x = -2$ می‌باشد زیرا علامت $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه عوض شده است. دقت کنید که $x = 1$ ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = 0$ است اما چون $f'(x)$ قبل و بعد از این نقطه تغییر علامت نداده پس این نقطه اکسترم نسبی تابع محسوب نمی‌شود.

نقطه $A(x, y)$ روی منحنی $y = (x - 2)^2$ را رأس چهارم مستطیل در نظر می‌گیریم، پس این رأس دارای مختصات $A(x, (x - 2)^2)$ است. با رسم شکلی ساده، مستطیل ایجادشده را مشخص می‌کنیم.



مساحت این مستطیل برابر است با:

$$S = xy \xrightarrow{y_A = (x-2)^2} S = x(x-2)^2 \quad ; \quad 0 < x < 2$$

$$S'_x = (x-2)^2 + 2x(x-2) = (x-2)(x-2+2x) = (x-2)(3x-2)$$

$$S'_x = 0 \Rightarrow (x-2)(3x-2) = 0 \xrightarrow{x=2} 3x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

بنابراین بیشترین مساحت مستطیل به ازای $x = \frac{2}{3}$ به دست می‌آید:

$$S_{\max} = x(x-2)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)^2 = \frac{2}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$

نقطه $M(\alpha, \sqrt{2\alpha+9})$ را بر روی منحنی $y = \sqrt{2x+9}$ در نظر می‌گیریم. فاصله میان دو نقطه A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - 4)^2 + (\sqrt{2\alpha+9} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16 + 2\alpha + 9} = \sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 25}$$

برای یافتن کمترین فاصله، ابتدا معادله $(MA)'_{\alpha} = 0$ را حل می‌کنیم:

$$(MA)'_{\alpha} = \frac{2\alpha - 6}{2\sqrt{\alpha^2 - 6\alpha + 25}}$$

$$(MA)'_{\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 3$$

بنابراین کمترین فاصله نقطه A از منحنی $y = \sqrt{2x+9}$ برابر است با:

$$(MA)_{\min} = \sqrt{9 - 6(3) + 25} = \sqrt{16} = 4$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۷

هرگاه $f(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد آنگاه نقاط بحرانی تابع $y = |f(x)|$ ، ریشه‌های ساده دو معادله $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ خواهد بود.

$$f(x) = |x^3 - x|$$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$$

$$(x^3 - x)' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

همچنین تابع در ابتدا و انتهای بازه $[-1, 2]$ نیز بحرانی است، بنابراین تابع $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ دارای شش نقطه بحرانی $x = 0, x = 1, x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = -1, x = 2$ است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

باتوجه به وجود عبارت $[x]$ در ضابطه تابع $f(x)$ ، ابتدا بازه $[-1, 2]$ را به زیربازه‌های کوچک‌تر تقسیم کرده و ضابطه تابع را روی هر زیربازه مشخص می‌کنیم.

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \sin \pi x$$

$$x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = 2 \sin \pi x$$

باتوجه به اینکه ضابطه تابع $f(x)$ در بازه $[0, 1]$ به صورت خط افقی $y = 0$ است پس هر $x \in [0, 1]$ می‌تواند یک نقطه بحرانی تابع $f(x)$ باشد، همچنین نقاط ابتدا و انتهای بازه $[-1, 2]$ یعنی $x = -1, 2$ نیز بحرانی هستند. بنابراین تابع $f(x)$ در بازه $[-1, 2]$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۵

برای تعیین وضعیت یکنوایی (صعودی یا نزولی بودن) تابع در اطراف نقطه $x = 0$ ، تابع y' را قبل و بعد از این نقطه تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - 3x^2(x^2 + 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

باتوجه به اینکه $f'(0) = 0$ است پس تابع $f(x)$ در نقطه $x = 0$ دارای مماس افقی است. داریم:

x	0
$f'(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$\swarrow \quad \searrow$ min

نقطه $x = 0$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

$$f'(x) = 1 + \frac{4 - 2x}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{4x-x^2} = x-2 \quad (*)$$

باتوجه به معادله باید $x-2 \geq 0$ باشد، یعنی: $x \geq 2$
 حال معادله (*) را حل می‌کنیم. ابتدا به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x - x^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} & \text{قابل قبول} \\ x = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} & (x \geq 2 \text{ زیرا}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(2 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{4(2 + \sqrt{2}) - (2 + \sqrt{2})^2}$$

$$= 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}) \text{ ماکزیمم نسبی}$$

حال فاصله نقطه A را از نیمساز ناحیه اول یعنی $y = x$ به دست می‌آوریم:

$$x - y = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

گام اول

الف) فرض کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد. همچنین فرض کنیم f بر بازه a شامل c پیوسته و بر این بازه به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت c طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f است هرگاه $f'(x)$ قبل از c مثبت و بعد از c منفی باشد.

ب) نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

$$y = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 \Rightarrow D = \mathbb{R}$$

ابتدا با حل معادله $y' = 0$ طول نقاط بحرانی تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y' = 4x^3 + 4x^2 - 8x \xrightarrow{y'=0} 4x(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$	$+$	
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		min	max	min	

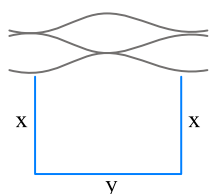
بنابراین طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع برابر صفر است.

گزینه ۱

تابع $y = x + \sqrt{x}$ یک‌به‌یک است زیرا صعودی اکید است.

$$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

اگر طول و عرض زمین را به ترتیب y و x بنامیم آنگاه داریم:



$$y + 2x = 110 \Rightarrow y = 110 - 2x$$

مساحت مستطیل برابر با حاصل ضرب طول در عرض آن است پس تعریف می‌کنیم:

$$S = xy = x(110 - 2x) = 110x - 2x^2$$

برای محاسبه بیشترین مساحت، معادله $S'_x = 0$ را حل می‌کنیم:

$$S'_x = 110 - 4x \Rightarrow S'_x = 0 \Rightarrow 4x = 110 \Rightarrow x = 27.5, y = 110 - 44 = 66$$

بنابراین:

$$S_{\max} = xy = 27.5 \times 66 = 1815$$

ابتدا وضعیت یکنوایی دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را روی دامنه تعریف آن‌ها بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x - 2, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1^2 - 2(1) + 4 = 1 - 2 + 4 = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$g(x) = x^3 + x, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

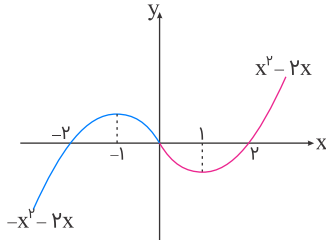
تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین کمترین مقدار تابع $g \circ f$ به ازای کمترین مقدار تابع $f(x)$ به دست می‌آید، پس می‌توان نوشت:

$$f(x) \geq 3 \Rightarrow g(f(x)) \geq g(3)$$

$$\Rightarrow (g \circ f)_{\min} = g(3) = 3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$$

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} x \geq 0 : f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x < 0 : f'(x) = -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

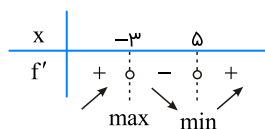
باتوجه به شکل، ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع به ترتیب برابر $(-1, 1)$ و $(1, -1)$ است، پس فاصله آن‌ها از هم برابر است با:

$$\text{فاصله} : \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

نقاط بحرانی تابع را در فاصله $[-۴, ۳]$ به دست می‌آوریم.

$$f(x) = \frac{1}{۳}x^۳ - x^۲ - ۱۵x \Rightarrow f'(x) = x^۲ - ۲x - ۱۵$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} x^۲ - ۲x - ۱۵ = (x - ۵)(x + ۳) = 0$$



$[-۴, ۳] = \text{نقاط بحرانی تابع در بازه}$

$$\left. \begin{aligned} f(-۴) &= -\frac{۶۴}{۳} - ۱۶ + ۶۰ = \frac{۶۸}{۳} \\ f(-۳) &= \frac{(-۳)^۳}{۳} - ۹ + ۴۵ = ۲۷ \\ f(۳) &= \frac{۳^۳}{۳} - ۹ - ۴۵ = -۴۵ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{x \in [-۴, ۳]} \begin{cases} y_{\min} = -۴۵ \\ y_{\max} = ۲۷ \end{cases}$$

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن، می‌یابیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

ضابطه $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbb{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به‌ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \Rightarrow y' = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x-4)(x+1)$$

$$y' = 0 \Rightarrow x(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(4) = -32 \\ y(-1) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

باتوجه به مقادیر به‌دست‌آمده، $y = -32$ کمترین مقدار تابع است.

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۲

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۳

گام اول

نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی تابع f گوئیم هرگاه $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

گام دوم

باتوجه به گام اول، نقاطی از دامنه تابع f که در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند یا به‌ازای آن‌ها $f'(x)$ تعریف نشده است را می‌یابیم.

$$f(x) = (x^2 - 28)\sqrt[3]{x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2 - 28) = \frac{6x^2 + x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 7x^2 - 28 = 0 \Rightarrow 7x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

به‌ازای $x = 0$ ، مخرج تابع $f'(x)$ برابر صفر و در نتیجه این تابع تعریف نشده است؛ بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به‌صورت $\{-2, 0, 2\}$ است.

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف این تابع است که $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ تعریف نشده باشد.

گام دوم:

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x - 2|$ ، ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم. $x = 2$ ریشه عبارت درون قدر مطلق است پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)\sqrt[3]{x^2} & ; x \geq 2 \\ -(x-2)\sqrt[3]{x^2} & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-2)x^{\frac{2}{3}} & ; x \geq 2 \\ -(x-2)x^{\frac{2}{3}} & ; x < 2 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است پس ضابطه تابع $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} & ; x > 2 \\ -\sqrt[3]{x^2} - \frac{2(x-2)}{3\sqrt[3]{x}} & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{5x-4}{3\sqrt[3]{x}} & ; x > 2 \\ \frac{-5x+4}{3\sqrt[3]{x}} & ; x < 2 \end{cases}$$

ریشه معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم:

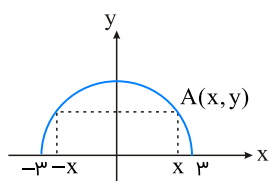
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 : 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \\ x < 2 : -5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \end{cases}$$

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی موجود نیست. $x = 0$ ریشه مخرج $f'(x)$ است پس در این نقطه تعریف نشده است؛ از طرفی به ازای $x = 2$ داریم:

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \frac{10-4}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} \\ f'_-(2) &= \frac{-10+4}{3\sqrt[3]{2}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{4} \end{aligned} \Rightarrow f'(2) \text{ موجود نیست}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع $f(x)$ به صورت $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$ است.

نقطه A را بر روی نیم‌بیضی $y = \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲}$ در نظر می‌گیریم.



این نقطه دارای مختصات $A(x, \frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲})$ است. فرض می‌کنیم طول مستطیل $۲x$ و عرض آن y باشد پس داریم:

$$S = ۲xy = ۲x\left(\frac{۲}{۳}\sqrt{۹ - x^۲}\right) = \frac{۴}{۳}x\sqrt{۹ - x^۲} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۹x^۲ - x^۴}, \quad -۳ < x < ۳$$

برای یافتن بیشترین مساحت، ابتدا معادله $S'(x) = ۰$ را حل می‌کنیم:

$$S'(x) = \frac{۴}{۳}\left(\frac{۱۸x - ۴x^۳}{۲\sqrt{۹x^۲ - x^۴}}\right)$$

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow ۱۸x - ۴x^۳ = ۰ \Rightarrow ۲x(۹ - ۲x^۲) = ۰$$

$$\xrightarrow{x \neq 0} ۲x^۲ = ۹ \Rightarrow x^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow x = \pm \frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} S_{\max} &= \frac{۴}{۳}\sqrt{۹x^۲ - x^۴} = \frac{۴}{۳}\sqrt{۹\left(\frac{۹}{۲}\right) - \frac{۸۱}{۴}} = \frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۸۱}{۲} - \frac{۸۱}{۴}} = \frac{۴}{۳}\sqrt{\frac{۸۱}{۴}} \\ &= \frac{۴}{۳} \times \frac{۹}{۲} = \frac{۳۶}{۶} = ۶ \end{aligned}$$

گام اول

الف) حجم مخروطی به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر است با:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

ب) مقدار جنس مصرفی برای ساخت یک مخروط معادل مساحت جانبی آن است.

ج) مساحت جانبی مخروطی به شکل زیر برابر است با:

$$S = \pi r l$$



گام دوم

برای اینکه در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت کمترین مقدار جنس مصرف شود باید مساحت جانبی آن را مینیمم کنیم. باتوجه به اینکه حجم مخروط برابر $\frac{\pi}{3}$ است، رابطه‌ای بین شعاع قاعده مخروط و ارتفاع مخروط به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r^2 h = 1 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{h} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (I)$$

برای محاسبه مساحت جانبی مخروط ابتدا لازم است اندازه l را به دست آوریم. با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow l = \sqrt{r^2 + h^2} \quad (II)$$

اکنون با استفاده از رابطه مساحت جانبی و با جایگذاری دو رابطه (I) و (II) در آن داریم:

$$S = \pi r l \xrightarrow{(II)} S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \xrightarrow{(I)} S = \pi \times \frac{1}{\sqrt{h}} \times \sqrt{\frac{1}{h} + h^2} = \frac{\pi \sqrt{h^3 + 1}}{h}$$

برای مینیمم کردن مساحت جانبی، از S نسبت به h مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \pi \times \frac{\frac{3h^2}{2\sqrt{h^3+1}} \times h - \sqrt{h^3+1}}{h^2} = \frac{\pi}{h^2} \left(\frac{3h^3 - 2h^3 - 2}{2\sqrt{h^3+1}} \right) = \frac{\pi}{h^2} \left(\frac{h^3 - 2}{2\sqrt{h^3+1}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow h^3 - 2 = 0 \Rightarrow h^3 = 2 \Rightarrow h = \sqrt[3]{2}$$

بنابراین به ازای ارتفاع $h = \sqrt[3]{2}$ در ساخت یک قیف مخروطی شکل با حجم ثابت $\frac{\pi}{3}$ ، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود.

ابتدا عبارت درون قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

x	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$x^2 - 3$	+	-

$$\Rightarrow |x^2 - 3| = \begin{cases} x^2 - 3 & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & ; x \geq \sqrt{3} \text{ یا } x \leq -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی تابع، نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم؛ بنابراین مشتق تابع را محاسبه و معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & ; x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 & ; -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \text{ یا } x < -\sqrt{3} : 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} : -3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

حال مشتق‌پذیری تابع را در دو نقطه $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ نیز بررسی می‌کنیم:

$$f'_+(\sqrt{3}) = 6, \quad f'_-(\sqrt{3}) = -6 \Rightarrow f'_+(\sqrt{3}) \neq f'_-(\sqrt{3})$$

$$f'_+(-\sqrt{3}) = -6, \quad f'_-(-\sqrt{3}) = 6 \Rightarrow f'_+(-\sqrt{3}) \neq f'_-(-\sqrt{3})$$

تابع $f(x)$ در دو نقطه $x = \sqrt{3}$ و $x = -\sqrt{3}$ مشتق‌پذیر نیست. داریم:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	-	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		max	min	max	min	

بنابراین مجموعه نقاط ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ به صورت $\{-\sqrt{3}, 1\}$ است.

عبارت $x^2 - 3$ روی بازه $[-1, 1]$ همواره منفی است بنابراین داریم:

$$x \in [-1, 1] : |x^2 - 3| = -(x^2 - 3) = 3 - x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = x |x^2 - 3| = x(3 - x^2) = 3x - x^3$$

حال معادله $f'(x) = 0$ را حل می‌کنیم:

$$f'(x) = 3 - 3x^2 \xrightarrow{f'(x)=0} 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

X	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	o	+	o	-
$f(x)$			↘	↗		↘

تابع $f(x)$ در بازه $[-1, 1]$ صعودی و پیوسته است؛ بنابراین $f(-1) = -2$ مینیمم مطلق تابع و $f(1) = 2$ ماکزیمم مطلق تابع روی این بازه است. نقاط $x = -1$ و $x = +1$ چون نقاط ابتدا و انتهای بازه هستند اکسترم‌های نسبی تابع $f(x)$ محسوب نمی‌شوند پس گزینه سوم نادرست است.

نقطه $M(\alpha, \alpha\sqrt{\alpha})$ را بر روی منحنی $y = x\sqrt{x}$ در نظر می‌گیریم. فاصله میان دو نقطه A و M برابر است با:

$$MA = \sqrt{(\alpha - ۸)^2 + (\alpha\sqrt{\alpha} - ۰)^2} = \sqrt{\alpha^2 - ۱۶\alpha + ۶۴ + \alpha^3} = \sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - ۱۶\alpha + ۶۴}$$

برای مینیمم کردن فاصله MA ، ابتدا معادله $(MA)'_{\alpha} = ۰$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$(MA)'_{\alpha} = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha - 16}{2\sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - 16\alpha + 64}}$$

$$(MA)'_{\alpha} = ۰ \Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha - 16 = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ \\ \alpha = -\frac{16}{6} \end{cases} \quad \text{غ ق ق (*)}$$

* دامنه تابع $y = x\sqrt{x}$ به صورت بازه $[۰, +\infty)$ است.

بنابراین کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از منحنی $y = x\sqrt{x}$ برابر است با:

$$(MA)_{\min} = \sqrt{(۲ - ۸)^2 + (۲\sqrt{۲})^2} = \sqrt{۳۶ + ۸} = \sqrt{۴۴} = ۲\sqrt{۱۱}$$

برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن یافته و کمترین آن‌ها را مشخص می‌کنیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. چون دامنه تابع چندجمله‌ای $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، کافی است ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست آوریم:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

هر سه مقدار فوق عضو بازه $[-1, 3]$ هستند. کمترین مقدار تابع را به‌ازای چهار مقدار $0, 2, -1, 3$ به دست می‌آوریم:

$$f(-1) = \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 = -\frac{5}{12}$$

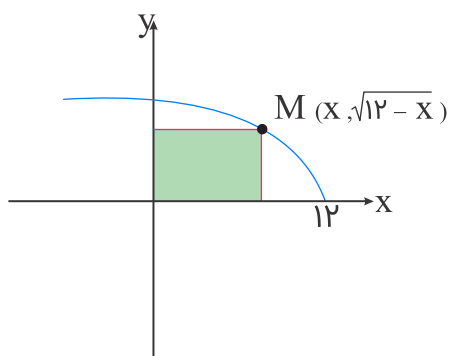
$$f(0) = 0$$

$$f(2) = \frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - 2^2 = -\frac{8}{3}$$

$$f(3) = \frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 3^2 = \frac{9}{4}$$

کمترین مقدار تابع روی بازه $[-1, 3]$ برابر $y = -\frac{8}{3}$ است.

نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



مساحت مستطیل ساخته شده برابر $S(x) = x\sqrt{12-x}$ است.

$$S' = \sqrt{12-x} - \frac{x}{2\sqrt{12-x}} = 0 \Rightarrow \frac{2(12-x) - x}{2\sqrt{12-x}} = 0$$

$$24 - 2x - x = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow S_{\max} = 8\sqrt{12-8} = 16$$

نقطه $B(x, \sqrt{2x+7})$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. فاصله نقطه $A(5, 0)$ را از نقطه B محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7}-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \end{aligned}$$

برای به دست آوردن کمترین فاصله، از AB مشتق می‌گیریم:

$$(AB)' = \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$$

$$(AB)' = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow B(4, \sqrt{15})$$

کمترین فاصله نقطه A از منحنی، برابر است با فاصله دو نقطه A و B . در نتیجه داریم:

$$A(5, 0), B(4, \sqrt{15}) \Rightarrow AB = \sqrt{(5-4)^2 + (0-\sqrt{15})^2} = 4$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

گام اول:

نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی از دامنه تعریف این تابع است که $f'(x) = 0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد.

گام دوم:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

حال ضابطه $f'(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

معادله $f'(x) = 0$ جواب ندارد. همچنین $f'(x)$ فقط به ازای $x = 0$ تعریف نشده است اما $x = 0$ عضو دامنه تعریف تابع $f(x)$ نیست پس نقطه بحرانی محسوب نمی‌شود، بنابراین تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)$ بر روی دامنه تعریف آن برابر صفر است.

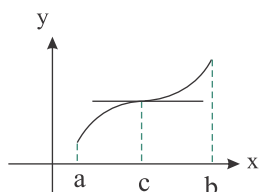
کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

با بررسی گزینه‌ها، جواب سؤال را مشخص می‌کنیم.

گزینه اول: اگر c نقطه اکسترمم نسبی f و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه تابع f در این نقطه پیوسته و خط مماس موجود است بنابراین قطعاً خط مماس در این نقطه افقی است.

گزینه دوم: می‌دانیم هر نقطه اکسترمم نسبی، بحرانی می‌باشد، پس این گزینه درست است.

گزینه سوم: فرض می‌کنیم c نقطه بحرانی تابع f باشد، باتوجه به نمودار زیر درستی این گزینه را رد می‌کنیم:



گزینه چهارم: باتوجه به اینکه c یک نقطه درون بازه است، پس اگر c نقطه اکسترمم مطلق تابع f باشد، قطعاً اکسترمم نسبی تابع نیز می‌باشد؛ بنابراین بر اساس دلیل درستی گزینه دوم، این نقطه یک نقطه بحرانی تابع f است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۰

$$y = (x-1)^2 \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y' = 2(x-1)(x^{\frac{2}{3}}) + (x-1)^2 \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) \Rightarrow y' = \frac{6(x-1)x + 2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow 2(x-1)(3x + (x-1)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

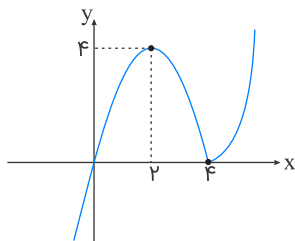
$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

باتوجه به گزینه‌ها $x = \frac{1}{4}$ جواب مسئله است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۵

$$f(x) = x|x - ۴| = \begin{cases} x^۲ - ۴x & ; x \geq ۴ \\ ۴x - x^۲ & ; x < ۴ \end{cases}$$

نمودار این تابع به صورت زیر است:



این تابع در $(۴, ۰)$ مینیمم نسبی و در $(۲, ۴)$ ماکزیمم نسبی دارد. فاصله آن‌ها برابر است با:

$$\sqrt{(۲ - ۴)^۲ + (۴ - ۰)^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادله $y' = 0$ به دست می‌آید، لذا:

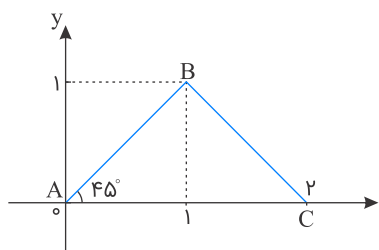
$$f(x) = x^2(x-2)^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(x-2)^2 + 2(x-2)(x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x(x-2)(x-2+x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 1, 2$$

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad C \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$



$$\Rightarrow AB = BC$$

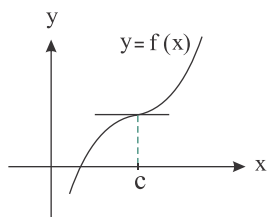
باتوجه به شکل و اینکه $AB = BC$ ، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴

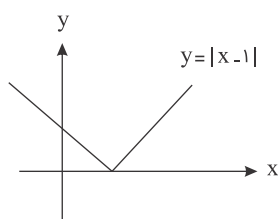
کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۸

با آوردن مثال نقض، گزینه‌های نادرست را رد می‌کنیم.
گزینه اول: نقطه $x = c$ در نمودار زیر، یک نقطه بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست.



گزینه سوم: نقطه $x = 1$ در تابع $y = |x - 1|$ یک نقطه بحرانی است اما مشتق تابع در این نقطه تعریف نشده است.



گزینه چهارم: نقطه $x = 1$ اکسترمم نسبی تابع $y = |x - 1|$ است اما مشتق تابع در این نقطه برابر با صفر نیست.
بنابراین هر نقطه اکسترمم نسبی، قطعاً یک نقطه بحرانی تابع است.

گام اول

تابع $f(x)$ روی یک بازه صعودی است هرگاه تابع روی این بازه پیوسته و $f'(x) > 0$ باشد.

گام دوم

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط $\mathbb{R}$ به جز دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ تعریف شده است. داریم:

$$y = \frac{x}{1 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{(1 - x^2) - (-2x)x}{(1 - x^2)^2} = \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$$

تابع y' به ازای تمام نقاط عضو دامنه تعریف تابع y ، مثبت است؛ بنابراین کافی است بازه‌ای را انتخاب کنیم که هیچ کدام از دو مقدار $x = \pm 1$ درون بازه نباشد، باتوجه به گزینه‌ها، نمودار تابع روی بازه $(-\infty, -2)$ صعودی است.

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - x^2 \leq x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq \sqrt[3]{x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq x \Rightarrow -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq 0$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $y = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

می‌دانیم به ازای $-1 \leq x \leq 1$ همواره $\cos x > 0$ است؛ ازطرفی به ازای هر x ، $|x| \geq 0$ است بنابراین به ازای $x \in [-1, 1]$ نامساوی $-|x| \cos x \leq 0$ برقرار است.

می‌دانیم بیشترین مقدار یک عبارت نامثبت برابر صفر است، بنابراین در بازه $[-1, 1]$ به ازای $x = 0$ ، ماکزیمم مقدار تابع $f(x)$ برابر صفر خواهد بود.

A نقطه : (a, a^2)

A' نقطه : (a^2, a)

$$y = x \text{ با } f \text{ تقاطع } \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow a \in (0, 1)$$

$$AA' = \sqrt{(a^2 - a)^2 + (a - a^2)^2} = \sqrt{2} |a^2 - a|$$

$$\xrightarrow{a \in (0, 1)} \sqrt{2} (a - a^2) = -\sqrt{2} a^2 + \sqrt{2} a$$

$$\xrightarrow{\max} \frac{-\Delta}{2a} = -\frac{\sqrt{2}^2 - 0}{2(-\sqrt{2})} = \frac{2}{-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون طول پاره‌خط مدنظر است، پس مثبت در نظر می‌گیریم.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۴۰۰

برای تعیین ماکزیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی می‌یابیم. بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق تابع خواهد بود. نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه تعریف تابع هستند که به‌ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد.

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{0 - (4x^3 - 12x^2 + 8x)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x-2)(x-1)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -4x(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

هیچ‌یک از سه مقدار به‌دست‌آمده مخرج تابع $f'(x)$ را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر سه طول نقطه بحرانی تابع $f(x)$ هستند. همچنین ابتدا و انتهای بازه هم نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس داریم:

$$f(0) = \frac{1}{0 + 5} = \frac{1}{5}$$

$$f(1) = \frac{1}{1 - 4 + 4 + 5} = \frac{1}{6}$$

$$f(2) = \frac{1}{16 - 32 + 16 + 5} = \frac{1}{5}$$

بنابراین ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ برابر $\frac{1}{5}$ است.

کنکور سراسری علوم تجربی داخل ۱۳۸۵

نقطه $A(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ را بر روی منحنی $y = \frac{2}{x^2}$ در نظر می‌گیریم. فاصله مبدأ مختصات از نقطه A برابر است با:

$$OA = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + \left(\frac{2}{\alpha^2} - 0\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}$$

برای مینیمم کردن فاصله OA ، ابتدا معادله $(OA)'_{\alpha} = 0$ را حل می‌کنیم:

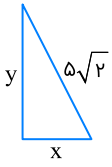
$$(OA)'_{\alpha} = \frac{2\alpha - \frac{16\alpha^3}{\alpha^6}}{2\sqrt{\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^4}}}$$

$$(OA)'_{\alpha} = 0 \Rightarrow 2\alpha - \frac{16}{\alpha^3} = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{16}{\alpha^3} \Rightarrow \alpha^6 = 8 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$$

بنابراین کوتاه‌ترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی $y = \frac{2}{x^2}$ ، به ازای $\alpha = \sqrt{2}$ به دست می‌آید:

$$(OA)_{\min} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^4}} = \sqrt{2 + \frac{4}{4}} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع قائم x و y ، به صورت زیر در نظر می‌گیریم. طبق رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + y^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 50$$

$$\Rightarrow y^2 = 50 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{50 - x^2}$$

$$\Rightarrow f = 3x + 4y = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$$

برای یافتن ماکزیمم مقدار تابع $f(x) = 3x + 4\sqrt{50 - x^2}$ ، مشتق آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$f'(x) = 3 + 4\left(\frac{-2x}{2\sqrt{50 - x^2}}\right) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 = \frac{4x}{\sqrt{50 - x^2}} \Rightarrow 3\sqrt{50 - x^2} = 4x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{x > 0} 9(50 - x^2) = 16x^2$$

$$\Rightarrow 450 - 9x^2 = 16x^2 \Rightarrow 25x^2 = 450 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18}$$

$$y = \sqrt{50 - x^2} = \sqrt{50 - 18} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$f_{\max} = 3x + 4y = 3(3\sqrt{2}) + 4(4\sqrt{2}) = 9\sqrt{2} + 16\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$$

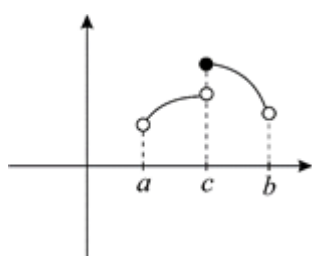
گام اول

الف) نقطه‌ای از دامنه تعریف تابع f که به ازای آن تابع بیشترین (کمترین) مقدارش را می‌پذیرد، اکسترمم مطلق این تابع نامیده می‌شود.

ب) وقتی تابع f در همسایگی یک نقطه از دامنه تعریف شود آنگاه آن نقطه، یک نقطه درونی دامنه است.

گام دوم

باتوجه به نمودار زیر، نقطه $x = c$ اکسترمم مطلق تابع f است و تابع در همسایگی این نقطه تعریف شده است. همان طور که ملاحظه می‌کنید تابع f در این نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است، همچنین مماس افقی ندارد.



بنابراین نقطه $x = c$ تنها می‌تواند یک نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^3} + 2x + 2x^2 + 2 - \cancel{2x^3} - 4x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 20 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

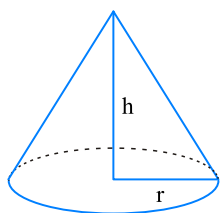
x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
f'	-	+	-	
f		$\searrow$ min	$\nearrow$ max	

$$f(2+\sqrt{5}) = \frac{(2+\sqrt{5})^2 + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{(2+\sqrt{5})^2 + 1}$$

$$= \frac{9 + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 1}{9 + 4\sqrt{5} + 1} = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \times \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} = -1 + \sqrt{5}$$

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۹

مخروطی به شعاع r و ارتفاع h در نظر می‌گیریم. داریم:



$$r + h = 1 \Rightarrow r = 1 - h$$

حجم این مخروط برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \xrightarrow{r=1-h} V = \frac{1}{3}\pi(1-h)^2 h = \frac{1}{3}\pi(h^3 - 2h^2 + h)$$

برای ماکسیمم کردن حجم مخروط، ابتدا معادله $V'_h = 0$ را حل می‌کنیم:

$$V'_h = \frac{1}{3}\pi(3h^2 - 4h + 1)$$

$$V'_h = 0 \Rightarrow 3h^2 - 4h + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{(زیرا } r + h = 1 \text{ غ ق ق)}$$

بنابراین به ازای $h = \frac{1}{3}$ ، بزرگ‌ترین حجم مخروط به دست می‌آید:

$$V_{\max} = \frac{1}{3}\pi \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi}{81}$$

گام اول

الف) باتوجه به خواص تابع جزء صحیح می‌دانیم: $0 \leq x - [x] < 1$

ب) هرگاه f تابعی اکیداً صعودی باشد، به ازای هر $x < y$ داریم: $f(x) < f(y)$

گام دوم

باتوجه به قسمت "الف" از گام اول می‌توان نوشت:

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 < [x] - x \leq 0 \Rightarrow -1 < f(x) \leq 0$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2^{[x]-x}$$

چون g تابعی اکیداً صعودی است، پس داریم:

$$-1 < f(x) \leq 0 \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(-1) < g(f(x)) \leq g(0)$$

$$\Rightarrow 2^{-1} < 2^{[x]-x} \leq 2^0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 2^{[x]-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < g \circ f \leq 1$$

بنابراین تابع $g \circ f$ دارای ماکزیمم و فاقد مینیمم است.

تابع چندجمله‌ای $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ و ازجمله روی بازه $(1, 4)$ پیوسته است. برای یافتن طول نقاط اکسترمم این تابع، کافی است معادله $f'(x) = 0$ را حل کنیم.

همچنین می‌دانیم در معادله $f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8 = 0$ حاصل‌ضرب جواب‌ها برابر است با: $\frac{c}{a} = \frac{-8}{3} < 0$ پس یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد. درنتیجه جواب مثبت در بازه $(1, 4)$ قرار دارد. حال داریم:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 24}}{3}$$

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} \text{ مثبت است، پس در بازه } (1, 4) \text{ قرار دارد:}$$

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} \Rightarrow 1 < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} < 4$$

$$1) \quad 1 < \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} \Rightarrow -a + \sqrt{a^2 + 24} > 3 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 24} > 3 + a$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + 24 > a^2 + 6a + 9 \Rightarrow 6a < 15 \Rightarrow a < 2/5 \quad (I)$$

$$2) \quad \frac{-a + \sqrt{a^2 + 24}}{3} < 4 \Rightarrow -a + \sqrt{a^2 + 24} < 12 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 24} < 12 + a$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} a^2 + 24 < a^2 + 24a + 144 \Rightarrow 24a > -120 \Rightarrow a > -5 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} -5 < a < 2/5$$

از آنجایی که $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ است، پس:

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

با فرض $\sin x = t$ ، داریم $-1 \leq t \leq 1$ و در نتیجه:

$$y = t^2 - t, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$y' = 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$y(1) = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4}$$

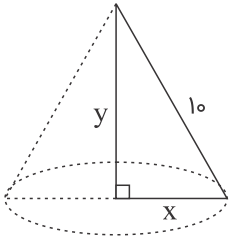
بنابراین کمترین مقدار تابع $\frac{-1}{4}$ است.

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۴

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۸۷

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۰ ۱۳۹۷

در مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائم x و y داریم:



$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \quad (*)$$

از دوران مثلث حول ضلع قائمه آن، مخروط تشکیل می‌شود، بنابراین داریم:

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y \xrightarrow{(*)} V = \frac{1}{3} \pi (100 - y^2) y = \frac{\pi}{3} (100y - y^3)$$

حال برای به دست آوردن طول اضلاع قائم، از V مشتق می‌گیریم:

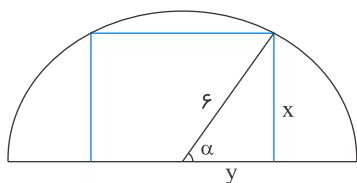
$$V' = \frac{\pi}{3} (100 - 3y^2) \Rightarrow \frac{\pi}{3} (100 - 3y^2) = 0$$

$$\Rightarrow 100 - 3y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 - y^2 \Rightarrow x^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{300 - 100}{3} = \frac{200}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{\frac{200}{3}}{\frac{100}{3}} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

راه حل اول:



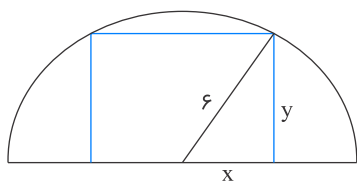
$$\sin \alpha = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 6 \cos \alpha$$

مساحت مستطیل: $S = x(y) = 2(36) \sin \alpha \cos \alpha = 36 \sin 2\alpha$

مساحت وقتی ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد. بنابراین: $S_{\max} = 36$

راه حل دوم:



$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow y = \sqrt{36 - x^2}$$

$$S = 2xy = 2x\sqrt{36 - x^2}$$

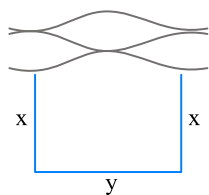
$$S' = 2\sqrt{36 - x^2} + \frac{-4x^2}{2\sqrt{36 - x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 36 - x^2 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S_{\max} = 2 \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 36$$

طول و عرض زمین را به ترتیب y و x و طول طناب را l می‌نامیم، در این صورت داریم:



$$l = 2x + y \Rightarrow y = l - 2x$$

بیشترین مساحت این زمین مستطیلی شکل ۶۴۸ متر مربع است پس:

$$S_{\max} = xy = 648 \xrightarrow{y=l-2x} S = x(l - 2x) = xl - 2x^2$$

$$\Rightarrow S'_x = l - 4x \Rightarrow S'_x = 0 \Rightarrow l - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{4}$$

$$S_{\max} = x(l - 2x) = \frac{l}{4} \left(l - \frac{l}{2} \right) = 648 \Rightarrow \frac{l^2}{8} = 648 \Rightarrow l^2 = 5184 \Rightarrow l = 72$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۴

باتوجه به اینکه تابع f در نقطه $x = c$ مشتق راست دارد پس حتماً در همسایگی راست این نقطه تعریف شده است. نقطه $x = c$ مینیمم نسبی تابع f است؛ بنابراین به ازای هر x عضو همسایگی راست این نقطه داریم:

$$\begin{cases} x > c \\ f(x) \geq f(c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - c > 0 \\ f(x) - f(c) \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

طبق تعریف مشتق راست در نقطه $x = c$ داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \xrightarrow{(*)} f'_+(c) \geq 0$$

بنابراین مشتق راست تابع f در نقطه $x = c$ الزاماً نامنفی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۰

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدوده تغییرات مقادیر $f(x)$ بر روی بازه مشخص شده است. مقادیر $f(x)$ بر روی یک بازه بین ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع پیوسته $f(x)$ روی بازه $[-3, 1]$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را بر روی این بازه یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی بازه می‌یابیم. می‌دانیم نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، نقاطی است که $f'(x) = 0$ باشد یا $f'(x)$ موجود نباشد؛ بنابراین داریم:

$$f(x) = x^3 - 12x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = -2 \xrightarrow{x \in [-3, 1]} x = -2$$

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) + 8 = -27 + 36 + 8 = 17$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 8 = -8 + 24 + 8 = 24 \Rightarrow \text{max مطلق}$$

$$f(1) = 1^3 - 12(1) + 8 = 1 - 12 + 8 = -3 \Rightarrow \text{min مطلق}$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ به صورت $[-3, 24]$ است.

نقطه $(1, -2)$ اکسترم نسبی تابع $f(x)$ است پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع $f(x)$ صدق می‌کند:

$$f(x) = \frac{a}{x} + bx^2 \xrightarrow{x=1, y=-2} -2 = a + b \quad (I)$$

می‌دانیم هر نقطه اکسترم نسبی، یک نقطه بحرانی تابع است بنابراین $x = 1$ در معادله $f'(x) = 0$ صدق می‌کند یعنی $f'(1) = 0$ است:

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} -a + 2b = 0 \Rightarrow a = 2b \quad (II)$$

با جایگذاری رابطه (II) در رابطه (I) داریم:

$$a + b = -2 \xrightarrow{a=2b} 2b + b = -2 \Rightarrow 3b = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{a=2b} a = -\frac{4}{3}$$

بنابراین:

$$f(x) = -\frac{4}{3x} - \frac{2}{3}x^2, \quad f'(x) = \frac{4}{3x^2} - \frac{4}{3}x$$

اکنون با تعیین علامت تابع $f'(x)$ ، نوع اکسترم نسبی تابع $f(x)$ را مشخص می‌کنیم:

x	1
f'(x)	+ 0 -
f(x)	↗ ↘ max

بنابراین به ازای $a = -\frac{4}{3}$ ، نقطه $(1, -2)$ ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - x^3 \geq -x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq \sqrt[3]{-x^3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq -x \Rightarrow x + \sqrt[3]{x^2 - x^3} \geq 0$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $f(x)$ بر روی $\mathbb{R}$ برابر صفر است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۳۹۲

ابتدا با تعیین علامت عبارت قدر مطلق $|x^2 - 1|$ روی بازه $[-2, 2]$ ، ضابطه تابع را ساده‌تر می‌کنیم. برای تعیین نقاط بحرانی تابع $f(x)$ ، کافی است نقاطی که $f'(x)$ برابر صفر باشد و یا در آن نقاط تعریف نشده باشد را بیابیم.

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1) & ; x \geq 1, x \leq -1 \\ -x(x^2 - 1) & ; -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - x & ; x \geq 1, x \leq -1 \\ -x^3 + x & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

تابع $f(x)$ در دو نقطه $x = 1$ و $x = -1$ پیوسته است، پس ضابطه $f'(x)$ برابر است با:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & ; x > 1, x < -1 \\ -3x^2 + 1 & ; -1 < x < 1 \end{cases}$$

اکنون ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 1, x < -1 : 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -1 < x < 1 : -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

(دقت کنید که در ضابطه اول، چون ریشه‌های به دست آمده در محدوده تعریف شده برای x قرار نمی‌گیرند پس قابل قبول نیستند.)

بررسی می‌کنیم $f'(x)$ در چه نقاطی تعریف نشده است:

$$x = 1 : f'_+(1) = 3 - 1 = 2, f'_-(1) = -3 + 1 = -2 \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

$$x = -1 : f'_+(-1) = -3 + 1 = -2, f'_-(-1) = 3 - 1 = 2 \Rightarrow \text{مشتق ناپذیر}$$

همچنین تابع در نقاط ابتدا و انتهای بازه $[-2, 2]$ بحرانی است.

بنابراین تابع $f(x)$ دارای ۶ نقطه بحرانی $x = -2, x = -1, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = \frac{\sqrt{3}}{3}, x = 1, x = 2$ است.

گام اول:

برد تابع $f(x)$ همان محدوده تغییر مقادیر $f(x)$ بر روی دامنه تعریف آن است. مقادیر $f(x)$ میان ماکسیمم و مینیمم مطلق این تابع تغییر می‌کند.

گام دوم:

ابتدا دامنه تعریف تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}} : \frac{2-x}{x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 2 \Rightarrow D_f = (0, 2]$$

به ازای $0 < x \leq 2$ ، $|x| = x$ است پس ضابطه تابع $f(x)$ را می‌توان چنین ساده کرد:

$$f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}} = (x + x)\sqrt{\frac{2-x}{x}} = 2x\sqrt{\frac{2-x}{x}} \stackrel{(*)}{=} 2\sqrt{\frac{x^2(2-x)}{x}} = 2\sqrt{2x - x^2}$$

(*) چون $x > 0$ است پس می‌توان توان دوم آن را زیر رادیکال برد.

تابع $f(x)$ بر روی دامنه‌اش پیوسته است. برای یافتن ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x)$ ، ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته و مقدار تابع را در این نقاط و همچنین در نقطه $x = 2$ محاسبه می‌کنیم. ضابطه تابع $f'(x)$ و ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x) = 2\sqrt{2x - x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 - 2x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 2\sqrt{2 - 1} = 2$$

$$f(2) = 2\sqrt{4 - 4} = 0$$

بنابراین برد تابع $f(x)$ بازه $[0, 2]$ است.

چون دامنه تابع $[-1, 3]$ است، پس $x_1 = 3$ و $x_2 = -1$ ریشه‌های معادله $-x^2 + ax + b = 0$ هستند.

$$x_1 + x_2 = \frac{-a}{-1} \Rightarrow -1 + 3 = a \Rightarrow a = 2$$

$$x_1 x_2 = \frac{b}{-1} \Rightarrow -1 \times 3 = -b \Rightarrow b = 3$$

طبق نمودار، مشاهده می‌کنید که مشتق تابع در ماکزیمم صفر است.

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x + 2}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = 0 \Rightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = (x - 1)^2 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$x = 1 + \sqrt{2}$ قابل قبول است.

$$\begin{aligned} f(1 + \sqrt{2}) &= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{-(1 + \sqrt{2})^2 + 2(1 + \sqrt{2}) + 3} \\ &= 1 + \sqrt{2} + \sqrt{-1 - 2 - 2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 3} = 1 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۹۷

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

اکسترم‌های تابع در $x = -1$ و $x = 2$ رخ می‌دهند.

$$f(-1) = 8 \Rightarrow \max : (-1, 8) \quad f(2) = -19 \Rightarrow \min : (2, -19)$$

$$AB \text{ شیب} : \frac{8 - (-19)}{-1 - 2} = \frac{27}{-3} = -9$$

مشتق را برابر -9 قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

۲ نقطه با این ویژگی وجود دارد.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$f(x) = \frac{x^F}{x^3 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{F x^3 (x^3 - 1) - 3 x^2 x^F}{(x^3 - 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 (F x^3 - 3 - 3 x^3)}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^3 (x^3 - 3)}{(x^3 - 1)^2}$$

x	$-\infty$	۰	۲	$\sqrt[3]{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	۰	-	ت	+

تابع در بازه‌های $[0, 2]$ و $(2, \sqrt[3]{3}]$ نزولی اکید است. طول بازه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$2 - 0 = 2$$

$$\sqrt[3]{3} - 2 = \sqrt[3]{8 \times \frac{3}{8}} - 2 = 2(\sqrt[3]{\frac{3}{8}} - 1) \simeq 1/17$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$$

تابع f در $x = 1$ مجانب قائم دارد. پس نمی‌تواند در فاصله $(1, +\infty) \cup (0, 1)$ اکیداً صعودی باشد و گزینه ۱ حذف می‌شود.

برای $x > 1$ یا $0 < x < 1$ ، $x^2 - 1$ صعودی، در نتیجه $2\sqrt{x^2 - 1}$ هم صعودی و مثبت است. $\frac{3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ نزولی و در نتیجه $\frac{-3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ صعودی است. $2\sqrt{x}$ هم که صعودی است، پس $2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ هم صعودی می‌شود و گزینه ۳ و ۴ حذف می‌شوند. راه حل دوم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^3}}$$

اگر $x > 0$ باشد، $f'(x)$ همواره مثبت است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک داخل ۱۴۰۰

$$f(x) = \frac{x^F - 3}{x^P - 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{F x^{F-1} (x^P - 2) - 2x (x^F - 3)}{(x^P - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2x^F - Fx^P - x^F + 3)}{(x^P - 2)^2} = \frac{2x(x^F - Fx^P + 3)}{(x^P - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^P - 1)(x^P - 3)}{(x^P - 2)^2}$$

x	-۲	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-۱	۰	۱	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	۲
f'	-	۰	+	$\frac{3}{2}$	+	۰	-	۰	+

در چهار بازه، تابع اکیداً نزولی است.

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۴۰۰

ابتدا با مشتق‌گیری از تابع $g(x)$ ، وضعیت یکنوایی این تابع را تعیین می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 + x \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

تابع $g(x)$ همواره صعودی است بنابراین بیشترین مقدار تابع $g \circ f$ به ازای بیشترین مقدار تابع f به دست می‌آید. با تعیین علامت تابع $f(x)$ ، تغییرات آن را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x; x \leq 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	

بیشترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x \leq 1$ ، در نقطه $x = -1$ به دست می‌آید که برابر است با:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$$

بنابراین با شرط $x \leq 1$ داریم: $f(x) \leq 2$

به این ترتیب بیشترین مقدار تابع $g \circ f$ برابر است با:

$$(g \circ f)_{\max} = g(2) = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$